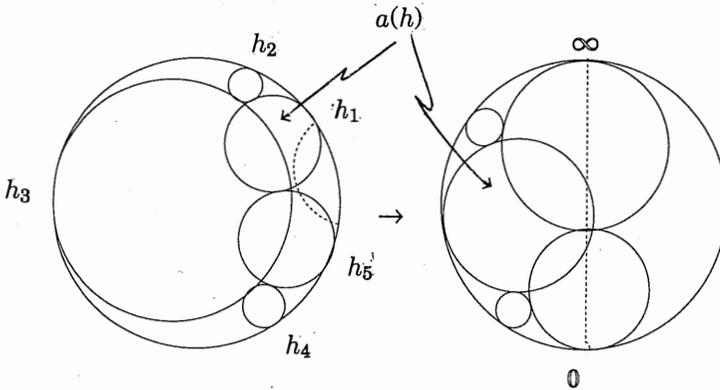


## LES ESPACES DE BRACELETS, LES COMPLEXES DE STASHEFF ET LE GROUPE DE THOMPSON

PAR PETER GREENBERG

### I. Introduction

Soit  $\mathbb{H}$  le demi-plan supérieur (un disque dans toutes nos figures). Un *bracelet* est un ensemble fini d'horocercles  $b = \{h_1, \dots, h_{n+1}\}$  tel que les points à l'infini des  $h_i$  sont dans l'ordre trigonométrique, et tel que  $h_i$  est tangent à  $h_{i+1}$ , et  $h_{n+1}$  est tangent à  $h_1$ .

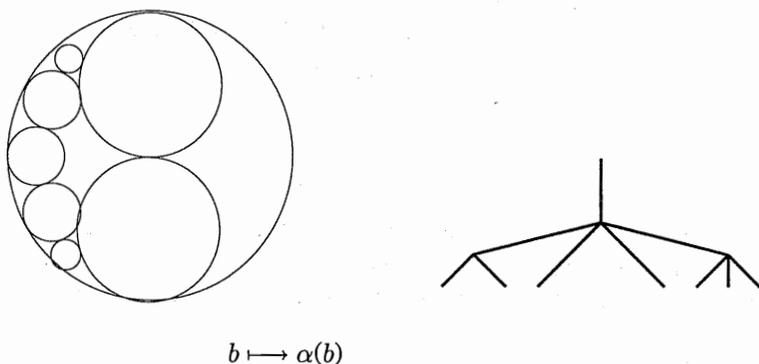


**Fig. 1** – Normalisation d'un bracelet

Etant donné un bracelet  $b = \{h_1, \dots, h_{n+1}\}$  il existe une unique isométrie de  $\mathbb{H}$  telle que l'image de  $h_1$  est  $\{z \mid \text{Im } z = 1\}$  et telle que l'image de  $h_{n+1}$  est tangente à 0; alors  $h_1 \cap h_{n+1} = \{i\}$  et  $[-\infty, 0]$  est partagé en  $n$  intervalles par les points à l'infini des  $h_i$ . L'espace de tels bracelets "normalisés" s'appelle  $B_n$ . On veut le comprendre.

On observe d'abord que  $B_n$  est une variété  $C^\infty$ , difféomorphe à  $\mathbb{R}^{n-2}$ . Or, les points à l'infini des  $h_i$ ,  $2 \leq i \leq n-1$ , varient librement et leur configuration dans  $\partial\mathbb{H}$  fixe le bracelet (voir l'Appendice). Nous allons étudier la topologie d'un certain sous-espace de  $B_n$ .

Soit  $b \in B_n$ , et soit  $a(b)$  l'arc fermé "horocercle par morceaux" qui parcourt les  $h_i$  entre les points d'intersection avec  $h_{i-1}$  et  $h_{i+1}$  (voir fig. 1, où  $a(b)$  est plus foncé). Si l'arc  $a(b)$  est simple (sans points d'autointersection) on dit que  $b$  est *propre*. Le sous-espace de  $B_n$  (évidemment ouvert) des bracelets propres s'appelle  $B_n^p$ . Nous écrivons aussi l'adhérence  $\overline{B}_n^p = B_n^p \cup B_n^t$ , où  $B_n^t$  est l'espace de bracelets tangents, i.e. tels que  $a(b)$  possède au moins un point d'autointersection, mais tels qu'aucune intersection n'est transverse (voir fig. 2). Notre but est de détailler la structure des  $\overline{B}_n^p$ .



**Fig. 2** — Un bracelet tangent et son arbre  $\alpha(b)$  (section III)

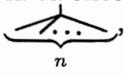
On verra que  $\overline{B}_n^p$  est une variété stratifiée (dans un sens faible:  $\overline{B}_n^p$  est une union de variétés ouvertes  $s_\alpha$ ,  $0 \leq \dim s_\alpha \leq n-2$ , dont l'adhérence  $\overline{s}_\alpha$  est une union de  $\overline{s}_\beta$ ,  $\dim s_\beta < \dim s_\alpha$ ). Il y a une strate  $s_\alpha$  pour chaque arbre planaire à  $n$  racines et une "tête" (voir fig. 2). Or, les complexes de Stasheff (voir [St] et section II) possèdent une face pour chacun de ces arbres. Notre résultat principal est en effet:

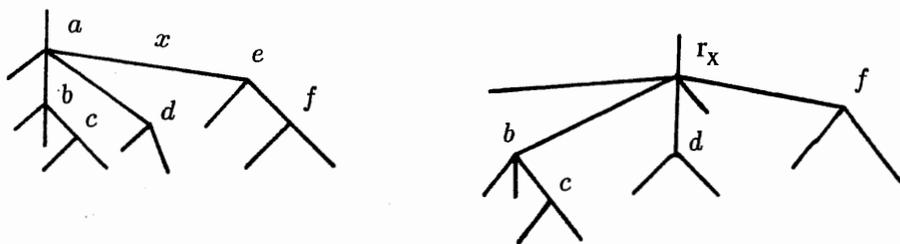
**THÉOREME (3).** Soit  $K_n$  le complexe de Stasheff ([St], dit "l'associahedron", voir [L]). Alors, il existe un homéomorphisme entre les paires  $(K_n, \partial K_n) \rightarrow (\overline{B}_n^p, B_n^t)$  qui envoie les intérieurs des faces sur les strates.

**COROLLAIRE (4).**  $B_n^t$  est homéomorphe à  $S^{n-3}$ , et  $B_n^p$  est une  $(n-2)$ -boule ouverte dans  $B_n$ .

*Démonstration.* On sait (d'après Stasheff [St]) que  $(K_n, \partial K_n)$  est homéomorphe à  $(\overline{B}^{n-2}, S^{n-3})$ . Or,  $B_n^p$  est ouvert et la frontière de  $\overline{B}_n^p$  est  $B_n^t \approx S^{n-3}$ , d'où  $B_n^p$  est une  $(n-2)$ -boule.

*Application (5).* Nous trouvons un espace de Eilenberg MacLane pour le groupe  $F$  de Thompson, dont les cellules sont des  $K_n$ . Pour l'énoncé du résultat il faut un peu de notation.

Soit  $\mathcal{A}_n$  donc l'ensemble des arbres planaires (i.e. munis d'un plongement dans  $\mathbb{R}^2$ , défini à isotopie près) avec  $n+1$  racines, l'une d'entre elles, la tête, distinguée; on suppose qu'aucun sommet n'a valence 2. Pour  $\alpha \in \mathcal{A}_n$ , soit  $n(\alpha)$  l'ensemble des sommets intérieurs (dont la valence est au moins 3) de  $\alpha$ ; si  $i \in n(\alpha)$  soit  $n_i$  le nombre de "directions descendantes", soit la valence moins 1. Soit  $|\alpha| = \sum_{i \in n(\alpha)} (n_i - 2)$ . On appelle  $T(n) \in \mathcal{A}_n$  l'arbre  défini par  $|T(n)| = n-2$ .



(a) un arbre  $\alpha \in \mathcal{A}_{10}$   
 $n(\alpha) = \{a, b, c, d, e, f\}$   
 $n_a = 4, n_b = 3, \text{ etc. } \dots$   
 $h_x = a, b_x = e$

(b) la contraction de  $\alpha$  par  $x$

Fig. 6

Une arête *intérieure* de  $\alpha \in \mathcal{A}_n$  est une arête dont la frontière  $\partial x = \{h_x, b_x\}$  se trouve dans  $n(\alpha)$ . Pour une arête intérieure  $x$  de  $\alpha$ , soit la *contraction de  $\alpha$  par  $x$*  l'arbre  $\beta \in \mathcal{A}_n$  qu'on obtient en identifiant  $x \cup \partial x$  à un sommet  $r_x$  (voir fig. 6). Nous écrivons donc  $\alpha \underset{x}{\sim} \beta$ , et si  $\alpha \underset{x_1}{\sim} \dots \underset{x_\ell}{\sim} \beta$ , nous écrivons  $\alpha < \beta$ .

Notons que si  $\alpha < \beta$ , on peut écrire

$$(7) \quad \begin{aligned} n(\alpha) &= \{h_x, b_x, \dots\} \\ n(\beta) &= \{r_x, \dots\} \end{aligned}$$

c'est-à-dire,  $n(\beta) = n(\alpha) - \{h_x, b_x\} \cup \{r_x\}$ , et puis que  $|\beta| = |\alpha| + 1$ .

Soit  $\alpha \in \mathcal{A}_n$ , alors le plongement de  $\alpha$  dans  $\mathbb{R}^2$  donne aux racines (la tête exclue) un ordre "de gauche à droite". Si  $k \in \mathbb{N}, 1 \leq k \leq n$ , on obtient un arbre  $\alpha_k \in \mathcal{A}_{n+1}$  par "naissance à la  $k^{\text{ème}}$  racine", en remplaçant la  $k^{\text{ème}}$  racine par un sommet intérieur de valence 3, et deux nouvelles arêtes. Alors, si  $\alpha \in \mathcal{A}_{2^n}$ , on définit  $j_n(\alpha) = (\dots(\alpha_{2^n})_{2^{n-1}} \dots)_1 \in \mathcal{A}_{2^{n+1}}$ ; c'est l'arbre obtenu par une naissance à chaque racine de  $\alpha$  (voir fig. 8). On note  $|\alpha| = |\alpha_k| = |j_n \alpha|$ .

On définit maintenant le groupe  $F$ , ainsi que des  $F$ -modules  $C_k$ .

*Définition (9).* (voir [B-G]) —  $F = \{(\alpha_2, \alpha_1) : \alpha_i \in \mathcal{A}_m, m \geq 2, |\alpha_i| = 0\} / \sim$ , où la relation  $\sim$  est engendrée par:  $(\alpha_2, \alpha_1) \sim (\alpha'_2, \alpha'_1)$  s'il existe  $k$  tel que  $\alpha'_i$  est obtenu à partir de  $\alpha_i$  par naissance à la  $k^{\text{ème}}$  racine,  $i = 1, 2$ . Le produit  $F \times F \rightarrow F$  est donné par  $(\alpha_3, \alpha_2) \cdot (\alpha_2, \alpha_1) = (\alpha_3, \alpha_1)$ .

On vérifie que  $F$  est un groupe;  $(\alpha_2, \alpha_1)^{-1} = (\alpha_1, \alpha_2)$ , et l'identité est  $(\alpha, \alpha)$ .

*Définition (10).* Soit  $S'_k = \{(\alpha_2, \alpha_1) \in \mathcal{A}_m \times \mathcal{A}_m, m \geq 0, |\alpha_1| = 0, |\alpha_2| = k\} / \sim$ , où  $(\alpha_2, \alpha_1) \sim (\alpha'_2, \alpha'_1)$  s'il existe un  $j$  tel que  $\alpha'_i$  est obtenu à partir de  $\alpha_i$  par naissance à la  $j^{\text{ème}}$  racine,  $i = 1, 2$ . Soit  $C_k = \mathbb{Z}^{S'_k}$  le groupe

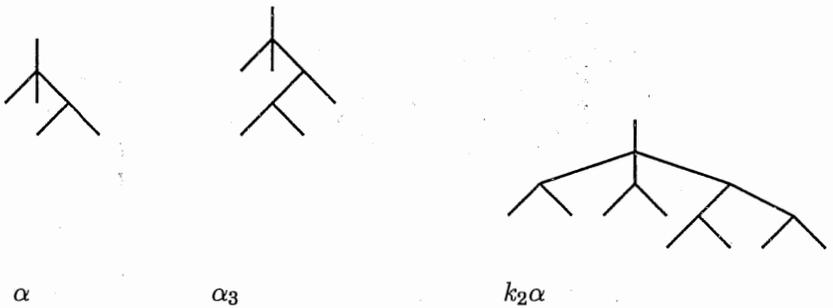


Fig. 8

abélien libre engendré par les éléments de  $S'_k$ . On note  $[(\alpha_2, \alpha_1)]$  le générateur associé à l'élément  $(\alpha_2, \alpha_1) \in S'_k$ .

Le groupe  $F$  agit à la droite sur les ensembles  $S'_k$ , par composition:

$$(11) \quad (\alpha_2, \alpha_1)(\alpha_1, \alpha_0) = (\alpha_2, \alpha_0) \quad \text{si} \quad (\alpha_2, \alpha_1) \in S'_k, (\alpha_1, \alpha_0) \in F$$

et donc sur les groupes  $C_k$ .

Exemple (11). Soient  $g = (\lambda; \lambda) \in F$ ,  $(\lambda, \lambda) \in S'_1$ . Alors

$$\begin{aligned} (\lambda, \lambda)g &= (\lambda, \lambda) (\lambda, \lambda) \\ &= (\lambda, \lambda) (\lambda, \lambda) \\ &= (\lambda, \lambda) \in S'_1. \end{aligned}$$

THÉORÈME (12). Il existe des homomorphismes  $d_k: C_k \rightarrow C_{k-1}$ ,  $d_k d_{k+1} = 0$ , tels que  $(C_*, d_*)$  est un complexe acyclique de  $F$ -modules libres.

On peut expliciter les  $d_k$  un peu. Soit  $S_k = \{\alpha \in \mathcal{A}_{2^n}, n \geq 0, |\alpha| = k\}$ . On définit  $J: S_k \rightarrow S'_k$  par  $J(\alpha) = (\alpha, j_{n-1} \cdots j_1 T(2))$ . Evidemment  $J$  est bijective. Ecrivons  $[\alpha] = [J(\alpha)] \in C_k$ .

PROPOSITION (13). Pour chaque paire  $\alpha, \beta$  d'arbres, telle que  $\alpha < \beta$ , il y a une valeur  $[\beta : \alpha] \in \{0, 1\}$  telle que

$$d_k[\beta] = \sum_{\alpha < \beta} (-1)^{[\beta:\alpha]} [\alpha].$$

Un problème: expliciter le coefficient  $[\beta : \alpha]$ .

Il est peut-être remarquable que la preuve du théorème 12 se fasse dans le cadre de la géométrie de bracelets. En effet,  $C_*$  est le complexe cellulaire d'une limite des  $\overline{B}_{2^n}^p$ ; les  $[\alpha]$  correspondent à des copies des  $K_n$ .

L'organisation de cette note est simple. On construit (section II) les  $K_n$  (d'après Boardman) de telle façon que la preuve du théorème 3 (section III) n'est pas difficile. On construit (section IV) le  $K(F, 1)$ , et démontre le théorème 12. L'appendice contient une paramétrisation explicite des  $B_n$ , comme des sous-variétés analytiques (réelles) de  $\mathbb{R}^{n+1}$ , et quelques remarques.

Cette note est une version plus longue d'un séminaire à Grenoble. Je remercie Richard Kenyon, qui m'a indiqué une erreur dans une version antérieure, Lucien Guillou pour son aide en topologie, ainsi que Jacques Helmstetter, Yves Carrière et Gilles Carron pour m'avoir aidé avec l'appendice.

### II. Les "Associahedra" de Stasheff

Bien que la construction originale des  $K_n$  utilise un calcul des "associations de  $n$  symboles", il nous convient de les construire, selon une idée de Boardman [B-V], avec des arbres. On continue avec la notation de l'Introduction.

La définition des  $K_n$  se fait par récurrence. Les  $K_n$  seront en effet une union des faces fermées  $f_\alpha$ , avec  $\dim f_\alpha = |\alpha|$ ,  $\alpha \in \mathcal{A}_n$ ; en plus  $K_n = f_{T(n)}$  et  $\partial K_n = \bigcup_{\alpha \neq T(n)} f_\alpha$ . Si  $\alpha < \beta$ ,  $f_\alpha$  est une face de  $f_\beta$ . Pour commencer, on définit:

$$K_2 = f_{\wedge} = f_{T(2)} = * \quad \text{un point}$$

$$K_3 = \begin{array}{c} \bullet \text{-----} \bullet \\ \wedge \qquad \qquad \wedge \\ f_{\wedge} \qquad \qquad f_{\wedge} \end{array} \quad \text{un intervalle.}$$

$f_{T(3)}$

Supposons, maintenant, les  $f_\alpha$  définies,  $\alpha \in \mathcal{A}_j$ ,  $2 \leq j \leq n - 1$  ainsi que des inclusions  $i_{\beta\alpha}: f_\alpha \rightarrow f_\beta$  si  $\alpha < \beta$ , et puis que  $(K_j, \partial K_j) \approx (\overline{B}^{j-2}, S^{j-3})$ , et construisons  $\partial K_n$ .

Posons, pour  $\alpha \in \mathcal{A}_n$ ,  $\alpha \neq T(n)$ ,  $f_\alpha \equiv \prod_{i \in n(\alpha)} f_{T(n_i)}$ . Si  $\alpha < \beta \neq T(n)$ , il faut définir  $i_{\beta\alpha}: f_\alpha \rightarrow f_\beta$ , soit (d'après (7))

$$i_{\beta\alpha}: f_{T(n_h)} \times f_{T(n_b)} \times \prod_{\dots} f_{T(n_i)} \longrightarrow f_{T(n_r)} \times \prod_{\dots} f_{T(n_i)}$$

Sur les derniers facteurs,  $i_{\beta\alpha} \equiv \text{id}$ ; il nous reste à définir  $i_{\beta\alpha}: f_{T(n_h)} \times f_{T(n_b)} \rightarrow f_{T(n_r)}$ . Soit  $V$  le sous-arbre de  $\alpha$  avec  $x$  comme seule arête intérieure, qui contient toutes les arêtes qui intersectent  $x$ . Alors par définition on a  $f_V \equiv f_{T(n_h)} \times f_{T(n_b)}$ , et par récurrence une inclusion  $i_{T(n_r)V}: f_V \rightarrow f_{T(n_r)}$ . La composition

$$f_{T(n_h)} \times f_{T(n_b)} \xrightarrow{\quad \equiv \quad} f_V \xrightarrow{i_{T(n_r)V}} f_{T(n_r)}$$

défini  $i_{\beta\alpha}$ .

Selon Stasheff [St], le complexe  $\partial K_n$  obtenu est homéomorphe à  $S^{n-3}$ ; définissons  $K_n = f_{T(n)}$  comme l'intérieur de cette sphère, c'est-à-dire  $f_{T(n)}$  est une  $(n - 2)$ -cellule dont la frontière est  $\partial K_n$ .

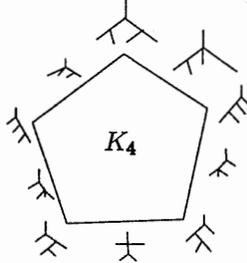


Fig. 14

Stasheff donne des modèles explicites pour les  $K_n$ . Voyons maintenant que les  $\overline{B}_n^p$  le sont aussi.

### III. Les strates des $\overline{B}_n^p$

Nous définirons maintenant une fonction  $\alpha: \overline{B}_n^p \rightarrow \mathcal{A}_n$ , dont les images inverses sont les strates  $s_\alpha$  de  $\overline{B}_n^p$ ,  $\alpha \in \mathcal{A}_n$ . Soit  $b = \{h_i\} \in \overline{B}_n^p$ , alors (voir fig. 2)  $\alpha(b)$  est l'arbre qui fournit un 1-squelette de  $\mathbb{H} - \bigcup_i \text{Int}(h_i)$ ; la tête de  $\alpha(b)$  correspond à la région de  $\mathbb{H} - \bigcup_i \text{Int}(h_i)$  dont le bord est l'axe réel positif. Evidemment, on a  $s_{T(n)} = B_n^p$ , un ouvert dans  $B_n$ . La proposition qui suit nous rappelle la définition des  $f_\alpha$  de la section II.

PROPOSITION (15).  $s_\alpha$  est difféomorphe à  $\prod_{i \in n(\alpha)} B_{n_i}^p$  et donc est une variété  $C^\infty$  ouverte, de dimension  $|\alpha|$ .

Démonstration. Pour cette preuve, donnons à l'ensemble  $n(\alpha)$  des sommets intérieurs l'ordre  $<$  "de haut en bas, de gauche à droite" (voir fig. 6, où l'ordre alphabétique des éléments de  $n(\alpha)$  est aussi l'ordre  $<$ ).

Nous définissons  $F_\alpha: \prod_{i \in n(\alpha)} B_{n_i}^p \rightarrow s_\alpha$ : soit  $(b_i) \in \prod B_{n_i}^p$ ,  $(b_i) = (b_1, \dots, b_{\#n(\alpha)})$ ,  $i < i + 1 \in n(\alpha)$ . D'abord, on construit  $b_1$ . Alors, on descend à la région dans  $\mathbb{H} - \bigcup \text{Int}(h_i)$  qui correspond au sommet 2. Elle est bordée par deux horocercles de  $b_1$ ; normalisons-les (voir fig. 1), puis mettons  $b_2$  dedans. On continue ainsi (voir fig. 16);  $F_\alpha$  est bien-définie, et bijective. ■

Démonstration du théorème (3). Enoncé: il existe un homéomorphisme  $\overline{B}_n^p \rightarrow K_n$  qui envoie  $\bar{s}_\alpha$  sur  $f_\alpha$ ,  $\alpha \in \mathcal{A}_n$ .

Par récurrence: commençons avec  $n = 2$ ,  $n = 3$   
 $n = 2$

$$K_2 = * = f_{T(2)}, \quad B_2 = B_2^t = \overline{B}_2^p = \left\{ \text{diagram of two circles} \right\}$$

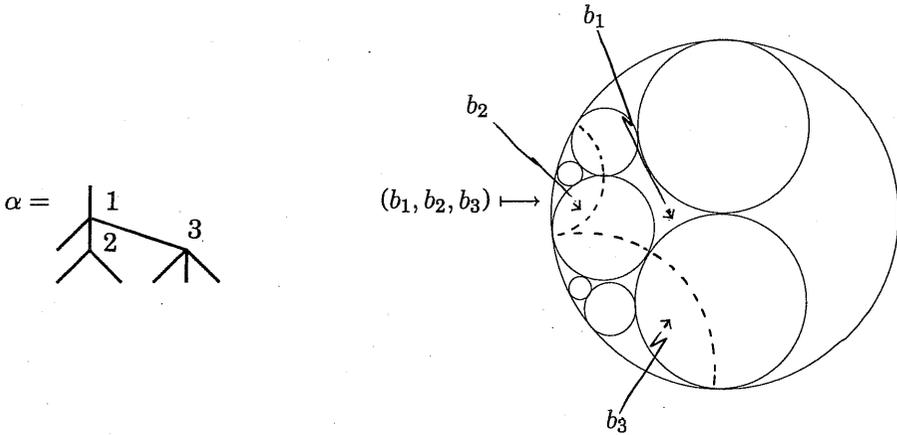
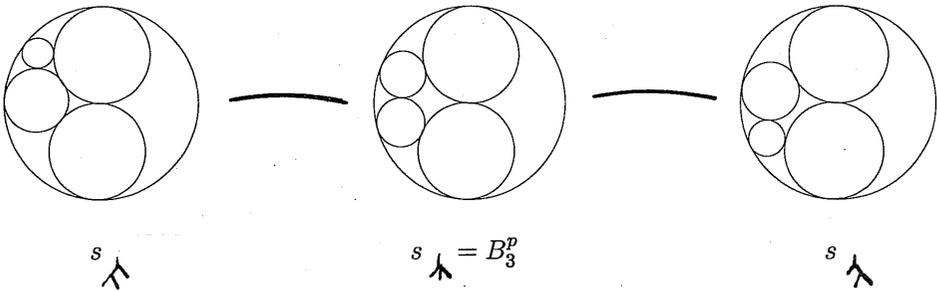
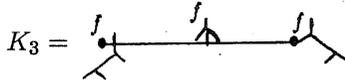


Fig. 16

$n = 3$



Supposons par récurrence, que pour  $\alpha \in \mathcal{A}_j$ ,  $2 \leq j \leq n - 1$  on a un homéomorphisme  $h_\alpha: f_\alpha \rightarrow \bar{s}_\alpha$  tel que si  $\alpha < \beta$ ,  $h_{\beta^t \beta \alpha} = h_\alpha$ . On définit  $h: \partial K_n \rightarrow B_n^t$  en écrivant  $f_\alpha = \prod f_{T(n_i)}$ ,  $s_\alpha = \prod B_{n_i}^p$ ,  $h|_{\text{Int } f_\alpha} \equiv \prod h_{T(n_i)}$ . Par récurrence,  $h$  est un homéomorphisme. Alors,  $B_n^t$  est homéomorphe à un  $S^{n-3}$ . Mais aussi,  $B_n^t$  est la frontière (topologique) de  $B_n^p$  dans  $B_n = \mathbb{R}^{n-2}$ , et donc  $B_n^p$  est une boule ouverte dans  $B_n$ . D'où l'existence d'une extension de  $h$  à  $K_n$ . ■

On définit maintenant des inclusions  $k_n: K_{2^n} \rightarrow K_{2^{n+1}}$ ,  $i_n: B_{2^n} \rightarrow B_{2^{n+1}}$ . Il se trouve que  $i_n(\bar{B}_{2^n}^p) \subseteq \bar{B}_{2^{n+1}}^p$  et on pose  $K = \lim_{\rightarrow} K_{2^n}$ ,  $B^p = \lim_{\rightarrow} \bar{B}_{2^n}^p$ , puis

on décrit quelques aspects de  $B^p$  et  $K$ .

On a défini déjà (section I) des inclusions  $j_n: \mathcal{A}_{2^n} \rightarrow \mathcal{A}_{2^{n+1}}$  "naissance à chaque racine". Soit  $K'_{2^n} \subseteq K_{2^{n+1}}$  le sous-complexe dont les cellules sont les  $s_{j_n(\alpha)}$ ,  $\alpha \in \mathcal{A}_{2^n}$ . Le complexe  $K'_{2^n}$  est une copie de  $K_{2^n}$  dans  $K_{2^{n+1}}$ ; soit

$k_n = K_{2^n} \rightarrow K'_{2^n} \subseteq K_{2^{n+1}}$  une telle identification, c'est-à-dire  $k_n f_\alpha = f_{j_n}(\alpha)$ . Soit  $K = \lim_{\substack{\longrightarrow \\ k_n}} K_{2^n}$ .

L'ensemble  $S_k$  des cellules de dimension  $k$  dans  $K$  est (voir section I)  $S_k = \{\alpha \in \cup \mathcal{A}_{2^n}, |\alpha| = k\} / \sim$ , où on pose  $\alpha \sim \alpha'$  si  $\alpha' = j_N \cdots j_n \alpha$ ; en effet,  $\alpha \in S_k$  représente la cellule  $f_\alpha \in K$ . Soit  $C_k = \mathbb{Z}^{S_k}$  le groupe libre abélien avec générateurs  $[\alpha], \alpha \in S_k$ . Alors  $C_* = C_*(K)$  et on déduit de la contractibilité de  $K$ , et de la structure de  $K_{2^n}$  déjà détaillée la

PROPOSITION (17). (voir Prop. (13)) *Pour chaque paire  $\alpha, \beta$  d'arbres, telles que  $\alpha < \beta$ , il y a une valeur  $[\beta : \alpha] \in \{0, 1\}$  telle que, en posant*

$$d_k[\beta] = \sum_{\substack{\alpha < \beta \\ x}} (-1)^{[\beta:\alpha]} [\alpha]$$

le complexe  $(C_*, d_*)$  est acyclique.

On répète les constructions précédentes pour les  $B_{2^n}$ . Si  $b \in B_m, b = \{h_1, \dots, h_m\}$ , et si  $k \in \mathbb{N}, 1 \leq k \leq m$ , on définit  $b_k \in B_{m+1}$  par  $b_k = \{h_1, \dots, h_k, h', h_{k+1}, \dots, h_m\}$  où  $h'$  est l'unique horocercle tel que  $\{h_k, h', h_{k+1}\}$  est un bracelet. On dit  $b_k$  est défini à partir de  $b$  par "naissance au  $k^{\text{ème}}$  intervalle". Si  $b \in B_{2^n}$ , soit  $i_n(b) = \{h_1 h'_1, h_2, h'_2, \dots, h'_m\} = (\cdots (b_{2^n})_{2^{n-1}} \cdots)_1$ . La relation entre  $j_n, k_n, i_n$  se résume ainsi:

PROPOSITION (18). Si  $\alpha \in \mathcal{A}_{2^n}, b \in B_{2^n}$  alors  $i_n s_\alpha = s_{j_n \alpha}, k_n f_\alpha = f_{j_n \alpha}, \alpha(i_n b) = j_n(\alpha(b))$ .

Soit  $B^p = \lim_{\substack{\longrightarrow \\ i_n}} \overline{B}_{2^n}^p$ , et soit  $C_*(B^p)$  le complexe des cellules de  $B^p$ .

COROLLAIRE (19).  $C_*(B^p) = C_*(K) = C_*$ .

Soit  $b_F^1$  l'unique élément de  $B_2$ , et soit ensuite  $b_F^n = i_{n-1} b_F^{n-1} \in B_{2^n}$ . Nous prenons l'image de  $b_F^1$  dans  $B^p$  comme point base; on le note  $b_F$ , c'est le "bracelet de Ford". Les propriétés remarquables des horocercles dans  $b_F$  se trouvent, par exemple, dans le livre de Rademacher [R]. Nous en donnons un court résumé.

ACTION PAR (20.1).  $\text{PSL}_2 \mathbb{Z}$ . Les points à l'infini des horocercles de  $b_F$  sont les éléments de  $(\mathbb{Q} \cap [-\infty, 0])$ . Soit  $h_q$  donc l'horocercle tangent à  $q \in \mathbb{Q} \cap [-\infty, 0]$ . Alors si  $g \in \text{PSL}_2 \mathbb{Z}$ , et si  $q, g(q) \in \mathbb{Q} \cap [-\infty, 0]$  alors  $g(h_q) = h_{g(q)}$ .

STRUCTURE BINAIRE (20.2). Si  $b = \{h_{q_1}, \dots, h_{q_m}\}$  est un sous-bracelet de  $b_F$ , alors  $\alpha(b)$  est binaire.

**IV. Un soupçon de géométrie CPP**

On définit maintenant un groupe  $\tilde{F}$ , ainsi qu'un espace  $T$  de fonctions sur lequel  $\tilde{F}$  agit. L'identification de  $T$  avec  $B = \lim B_{2^n}$  amène à une identification (prop. 24) de  $F$  et  $\tilde{F}$ , puis à la démonstration du théorème 12.

Nous supposons, pour la suite, les propriétés élémentaires de l'action de  $\text{PSL}_2 \mathbb{R}$  sur  $\mathbb{H}$ . Si  $r_1, \dots, r_n \in S^1$ , on écrit  $r_1 < \dots < r_n < r_1$  quand les  $r_i$  sont dans l'ordre trigonométrique. Puis on définit l'intervalle  $(a, b) = \{x \in S^1 : a < x < b < a\}$  ainsi que  $[a, b]$ ,  $[a, b)$ ,  $(a, b]$ .

Pour  $r \in S^1$ , on pose  $P_r = \{g \in \text{PSL}_2 \mathbb{R} : g(r) = r, g'(r) = 1\}$ , soit le groupe des *paraboliennes* au point  $r$ . Soit  $\hat{\mathbb{Q}} = \mathbb{Q} \cup \{\infty\} \subseteq S^1$ .

"CPP" veut dire  $C^1$ , projective par morceaux ("C<sup>1</sup>, piecewise projective" en anglais).

*Définition (21).*

a)  $\text{CPP}(S^1) = \{g \in \text{homeo}^+(S^1) : \exists r_1 < \dots < r_n < r_1 \in S^1 \text{ tel que (i) } g|_{(r_i, r_{i+1})} \equiv g_i \in \text{PSL}_2 \mathbb{R}, g|_{(r_n, r_1)} \equiv g_n \in \text{PSL}_2 \mathbb{R}, \text{ (ii) } g_{i-1}^{-1}g_i \in P_{r_i}, g_n^{-1}g_1 \in P_{r_1}\}$ . Si  $g \in \text{CPP}(S^1)$ , l'ensemble de  $r_i \in S^1$  tel que  $g_{i-1}^{-1}g_i \neq \text{id}$  s'appelle  $bk(r_i)$ , l'ensemble des points de rupture de  $g$ .

b)  $T = \{g \in \text{CPP}(S^1) : g|_{[0, \infty]} \equiv \text{id}, bk(g) \subset \hat{\mathbb{Q}}\}$ .

c)  $\tilde{F} = \{g \in T \mid g|_{(a, b)} \in \text{PSL}_2 \mathbb{Z} \text{ si } (a, b) \cap bk(g) = \emptyset\}$ .

On voit que  $\tilde{F}$  est un sous-groupe de  $\text{homeo}^+(S^1)$  qui agit librement par composition à droite sur  $T$ .

**PROPOSITION (22).** *Pour chaque  $n \geq 1$  il existe un homéomorphisme  $\tau_n$  de  $B_{2^n}$  sur un sous-espace fermé  $T_{2^n}$  de  $T$ , tel que  $\tau_n \circ \tau_n = \tau_{n+1}$ . On a  $T = \cup T_{2^n}$ . L'homéomorphisme induit  $\tau : B \rightarrow T$  envoie  $b_F$  sur l'identité.*

La preuve est une conséquence d'un lemme dans le cadre de la géométrie "CPP". La preuve de ce lemme se trouve dans [G]. D'abord, soit  $h$  un horocercle tangent à  $r \in S^1$ , et soit  $g \in P_r$ . Alors,  $g(h) = h$ . Donc si  $g \in \text{CPP}(S^1)$ ,  $g(h)$  est bien défini comme horocercle. De plus, on trouve:

**LEMME (23).** *Soit  $b = \{h_1, \dots, h_n\}$  un bracelet, et soit  $r_i \in S^1$  le point à l'infini de  $h_i$ .*

a) *Si  $g \in \text{CPP}(S^1)$ ,  $bk(g) \subseteq \{r_i\}$ , alors  $g(b) \equiv \{g(h_1), \dots, g(h_n)\}$  est encore un bracelet.*

b) *Si  $b' = \{h'_1, \dots, h'_n\}$  est un bracelet, il existe un unique élément  $g \in \text{CPP}(S^1)$  tel que  $bk(g) \subseteq \{r_i\}$ ,  $g(b) = b'$ .*

On démontre maintenant la proposition 22. D'abord, soit  $T_{2^n} = \{g \in T : bk(g) \text{ est un sous-ensemble des points à l'infini des horocercles dans } b_F^n\}$ , et soit  $\tau_n(g) = g(b_F^n)$ . La proposition est donc une conséquence de 20 et 23. ■

Soient  $g \in \tilde{F}$ ,  $n \geq 0$ , tels que  $g \in T_{2^n}$ . D'après les remarques 20,  $\alpha g(b_F^n)$  est un arbre binaire. A l'élément  $g \in \tilde{F}$  on associe la paire d'arbres binaires  $p(g) = (\alpha g b_F^n, \alpha b_F^n)$ .

PROPOSITION (24).  $p: \tilde{F} \rightarrow F$  est un isomorphisme de groupes.

*Preuve.* Comme chaque élément de  $F$  peut s'écrire sous la forme  $(\beta, \alpha b_F^n)$  où  $\beta \in \mathcal{A}_{2^n}$ , l'application est bijective. Soient  $g \in \tilde{F}$ ,  $g \in T_{2^n}$ ,  $k \in \mathbb{N}$ ,  $0 \leq k \leq 2^n$ . Soit  $t$  (resp.  $t'$ ) l'arbre obtenu à partir de  $\alpha b_F^n$  (resp. à partir de  $\alpha g b_F^n$ ) par naissance à la  $k^{\text{ème}}$  racine, c'est-à-dire  $t = (\alpha b_F^n)_k$ ,  $t' = (\alpha g b_F^n)_k$ . Soit  $b = (b_F^n)_k$ . Alors on a  $\alpha(b) = t$ ,  $\alpha g(b) = t'$ , ce qui démontre que l'application est un homomorphisme. ■

*Démonstration du théorème (12).* Il s'agit de vérifier que l'action de  $F$  sur les  $S'_k$  (décrit dans la définition 10) correspond, via l'homéomorphisme  $\tau: T \rightarrow B$  et l'isomorphisme  $p: \tilde{F} \rightarrow F$  à l'action de  $\tilde{F}$  sur  $T$ . Un générateur  $[\alpha] \in C_k$  correspond, via  $C_* \simeq C_*K$ , à la face  $f_\alpha$  de  $K$ , puis, via la proposition 22, à l'ensemble  $T_\alpha$  des éléments  $g \in T_{2^k}$  tels que  $\alpha(g(b_F^k)) = \alpha$ . Si  $\gamma \in \tilde{F}$ , on peut écrire  $p^{-1}(\gamma)$  sous la forme  $(b_F^k, \beta)$  (ayant peut-être remplacé  $k$  par  $k + m$ ,  $m > 0$ , et  $\alpha$  par  $i_{k+m-1} \cdots i_k \alpha$ ). Soit  $b$  le sous-bracelet de  $b_F$  tel que  $\alpha(b) = \beta$ . Alors,

$$\begin{aligned} T_\alpha \gamma &= \{g \in T : bk(g) \text{ est contenu dans les points à l'infini} \\ &\quad \text{de } b, \text{ et } \alpha(g(b)) = \alpha\} \\ &= T_{J^{-1}(\alpha, \beta)}, \end{aligned}$$

c.q.f.d.

*Remarques (24).*

(i) Le  $K(F, 1)$  ici construit possède une infinité dénombrable de  $k$ -cellules, pour chaque  $k$ . L'ensemble des  $k$ -cellules s'identifie à l'ensemble  $\mathcal{O}_k$  d'orbites de l'action de  $F$  sur  $S_k$ . Alors,  $\mathcal{O}_k$  se décrit comme l'ensemble des arbres  $\alpha$  tels que  $|\alpha| = k$  et tels que chaque racine de  $\alpha$  est le bout d'une arête de valence au moins 4.

(ii) K. Brown et R. Geoghegan ([B-G]) construit un complexe cubique sur lequel  $F$  agit. Cela s'identifie avec le sous-complexe de  $K$  donné comme l'ensemble des  $f_\alpha$  tels que

- (a) les valences des arêtes intérieures sont 3 ou 4.
- (b) les arêtes de valence 4 se trouvent rangées "à l'extrême droite" (voir fig. 25).



Fig. 25

**Appendice — Géographie des Bracelets**

Pour ceux que cela intéresse, on donne ici une paramétrisation des espaces  $B_n$ . Nous présentons seulement les résultats de certains calculs, dont les détails apparaîtront (peut-être) ailleurs.

Soit  $b \in B_n$ . L'arc  $a(b)$  (voir fig. 1) se divise en  $n + 1$  sous-arcs  $a_i \subset h_i$ . Soit  $\ell_i$  la longueur de l'arc  $a_i(b)$ , et soit  $\ell(b) = (\ell_1, \dots, \ell_{n+1})$ . L'application  $\ell$  est un plongement de  $B_n$  dans  $(\mathbb{R}^+)^{n+1}$ . Lorsque  $n = 2$ , on trouve  $\ell(b) = (1, 1, 1)$  (il n'y a qu'un seul bracelet). Avec  $n = 3$ , on trouve  $\ell(b) = (\ell_1(b), 2/\ell_1(b), \ell_1(b), 2/\ell_1(b))$ . Or, le plongement  $p_3 : \mathbb{R}^+ \rightarrow (\mathbb{R}^+)^4$  défini par  $p_3(\sigma) = (\sigma, 2/\sigma, \sigma, 2/\sigma)$  fournit une paramétrisation de  $B_3$ . En général, on trouve:

**Résultat (A.1).** Soit  $p_n : (\mathbb{R}^+)^{n-2} \rightarrow (\mathbb{R}^+)^{n+1}$  définie par

$$p_n(\sigma_1, \dots, \sigma_{n-2}) = \left( \sigma_1, \frac{1 + \sigma_2}{\sigma_1}, \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{\sigma_2}, \dots, \frac{\sigma_{j-2} + \sigma_j}{\sigma_{j-1}}, \dots, \frac{\sigma_{n-4} + \sigma_{n-2}}{\sigma_{n-3}}, \right. \\ \left. \frac{1 + \sigma_{n-3}}{\sigma_{n-2}}, \sigma_{n-2}, \frac{1}{\sigma_1} + \frac{1}{\sigma_1 \sigma_2} + \dots + \frac{1}{\sigma_j \sigma_{j+1}} + \dots + \frac{1}{\sigma_{n-2}} \right).$$

Alors  $p_n$  est un plongement, dont l'image est  $\ell(B_n)$ .

Quelques remarques suivent:

1. Des paramétrisations  $p_n$ , on tire des équations qui définissent les  $\ell(B_n)$ ; on trouve facilement, par exemple, que

$$B_4 = \left\{ (\ell_1, \dots, \ell_5) \mid \ell_2 = \frac{1 + \ell_4}{\ell_1}, \ell_3 = \frac{1 + \ell_1}{\ell_4}, \ell_5 = \frac{1}{\ell_1} + \frac{1}{\ell_4} + \frac{1}{\ell_1 \ell_4} \right\}.$$

2.- En posant  $L(\ell_1, \dots, \ell_{n+1}) = \sum_1^{n+1} \ell_i$ , la longueur de l'arc  $a(b)$  est  $L(\ell(b))$ . On trouve que la fonction  $L \circ p_n$  est de Morse, avec un seul point singulier, un minimum. Le bracelet minimal  $b_{\min}$  est symétrique, invariant par un élément de  $\text{Isom}(\mathbb{H})$  d'ordre  $n + 1$ , et  $p_n(b_{\min}) = (2 \cos \pi/n + 1, \dots, 2 \cos \pi/n + 1)$ ,  $Lp_n(b_{\min}) = 2(n + 1) \cos(\pi/n + 1)$ .

3.- Le plongement  $p_n$  nous fournit une action curieuse de  $\mathbb{Z}/n + 1$  sur  $(\mathbb{R}^+)^{n-2}$ . Or, si  $(\ell_1, \dots, \ell_{n+1}) = \ell(b)$ ,  $b \in B_n$  alors il existe  $b' \in B_n$  tel que  $\ell(b') = (\ell_2, \ell_3, \dots, \ell_{n+1}, \ell_1)$ , et donc l'automorphisme  $rot$  de  $(\mathbb{R}^+)^{n+1}$ , défini par  $rot(\ell_1, \dots, \ell_{n+1}) = (\ell_2, \dots, \ell_{n+1}, \ell_1)$  envoie  $\ell(B_n)$  sur lui-même, donnant ainsi un automorphisme d'ordre  $n + 1$  de  $(\mathbb{R}^+)^{n-2} = \{(\sigma_1, \dots, \sigma_{n-2})\}$ .

Soit  $\{\ell_i\}$  les fonctions "coordonnées" de  $\mathbb{R}^{n+1}$ . Alors,  $\ell_i \text{ rot}(p_n(\sigma)) = \ell_{i+1}(p_n(\sigma))$ ,  $\ell_{n+1} \text{ rot}(p_n(\sigma)) = \ell_1(p_n(\sigma))$ ,  $\sigma \in (\mathbb{R}^+)^{n-2}$ . On trouve, par exemple, avec  $n = 5$

$$\text{rot}(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = \left( \frac{1 + \sigma_2}{\sigma_1}, \frac{\sigma_1^2 + \sigma_1\sigma_3 - \sigma_2}{\sigma_2}, \frac{1}{\sigma_1} + \frac{1}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{1}{\sigma_2\sigma_3} + \frac{1}{\sigma_3} \right)$$

un automorphisme d'ordre 6.

4.- On peut examiner les strates (ou plutôt leurs extensions comme sous-variétés analytiques de  $B_n$ ) avec l'aide des plongements  $p_n$ . On considère dans la figure A.2 un exemple d'un arbre  $\alpha$  tel que  $s_\alpha \subset B_5$  (voir fig. A.2). Si  $b \in s_\alpha$ , la proposition 10 exprime  $b$  comme  $b = (b_1, b_2) \in B_3 \times B_3$ .

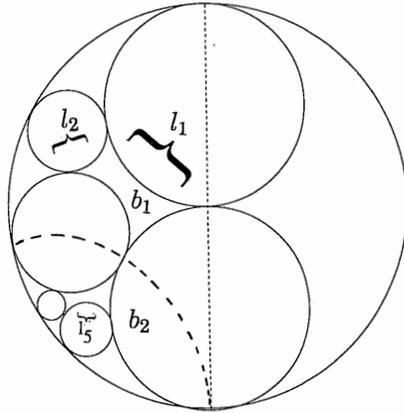
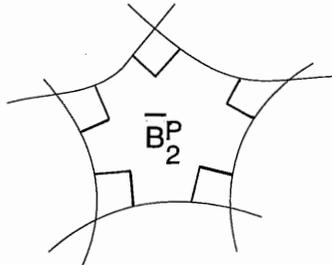


Fig. A.2 - Un bracelet de  $s_\alpha$

On trouve donc  $\ell_2 = 2/\ell_1$ ,  $\ell_3 = \ell_1 + \ell_5$  d'où  $\sigma_2 = 1$ , et alors  $p_5^{-1}\ell(s_\alpha)$  est un ensemble ouvert dans  $\{(\sigma_1, 1, \sigma_3)\}$ .

On peut aussi calculer que dans  $(\mathbb{R}^+)^5$  les strates de dimension 1 de  $B_2$  s'intersectent en formant un angle de  $\pi/2$ :



D'où (et des autres calculs) la conjecture que les  $\overline{B}_n^p$  sont des variétés stratifiées dans le sens de Whitney ("condition (b)", par exemple).

5.- La géométrie Riemannienne induite par les  $p_n$  est invariante par l'action du groupe  $F$ .

INSTITUT FOURIER  
LABORATOIRE DE MATHÉMATIQUES  
BP 74  
38402 ST MARTIN D'HÈRES  
CEDEX FRANCE

#### REFERENCES

- [1] BROWN K., *Finiteness properties of groups*, J. Pure and Applied Alg. **44** (1987), 45-75.
- [2] ———, AND GEOGHEGAN R., *An infinite dimensional torsion free  $FP_\infty$  group*, Invent. Math. **77** (1984), 367-381.
- [3] BOARDMAN J. M., VOGT R. M., *Homotopy invariant algebraic structures on topological spaces*, S.L.N. **347**, Springer-Verlag, Berlin (1973).
- [4] GREENBERG P., *Primer on CPP geometry*, Preprint, Bielefeld (1991).
- [5] LEE C. W., *The associahedron and triangulations of the  $n$ -gon*, Europ. J. Comb. **10** (1989), 551-560.
- [6] RADEMACHER H., *Topics in analytic number theory*, Springer-Verlag, Berlin (1973).
- [7] STASHEFF J., *Homotopy associativity of  $H$ -spaces I, II*, Trans. Amer. Math. Soc. **108** (1963), 275-292; *ibid* **108** (1963), 293-312.